量子カオス系の軌道不安定について

京大基研　池田研介

§ 0. 序

本研究の目的は数値時間反転実験の手法によって量子カオス系の外部摂動に対する敏感性をテストしようとするものである。この手法によって

◆ 量子系では軌道不安定性がみられるために必要な最小の量子的スケールが存在すること

◆ 量子性と軌道不安定性の協同効果によって、時間反転不能性が量子系においてより増大する場合が存在すること

が明らかにされる。これらの性質は半古典理論によってほぼ説明できた。以下の議論は特定のモデルに依存しないと考えられるが数値実験は Kicked rotor (KR) 及び結合 Kicked rotor (CKR) を用いて行われた。

さて「時間反転実験」は次の手続きに従って行われる。

(1) 系を時間 T だけ自由発展させる (forward evolution. FE)。

(2) T に於て系の位相空間内の位置を $\overrightarrow{\zeta}$ だけずらせる摂動 $\hat{P}$ を印加。

(3) 時間反転した発展則 (backward evolution. BE) で系を発展させる。

このようにして FE と BE の間の偏差が $\hat{P}$ によって如何に依存するかを調べることによって、系の摂動敏感性が定量的に調べられる。

図 1 に KR に対して行われた反転実験の典型例を示す。(a) は摂動のずらしパラメータ ζ を $\zeta = 2^n\zeta_0$ のように変化させた時の全 time evolution を重ねうちしたものである。(b) は非可逆性

$$m_{irr}(\tau, \hat{P}) = M(T+\tau) - M(T-\tau)$$

ここに $M(t) = \langle\Psi(t)|(\hat{p}-p_0)^2|\Psi(t)\rangle$ (p_0: 初期運動量)、つまり運動量の 2 次のモーメントの FE と BE での偏差を $\hat{p}$ の十分大きい $m_{irr}(\tau, \hat{P})$ から測ったもの、即ち

$$m_0(\tau, \hat{P}) = m_{irr}(\tau, \hat{P} = \text{十分大}) - m_{irr}(\tau, \hat{P})$$

を $\hat{P}$ の強さの関数として plot したものである。時刻は $\tau = T/2, T$ に固定している。古典的には $m_0(\tau, \hat{P}) \propto log\zeta/\lambda$ (λ はリアプノフ数) が期待され、確かに ζ が十分大きくなれば古典的挙動がみ

られるがζ があるしきい値 ζ_{th} より小さくなると $m_0(\tau,\hat{P})$ は古典ブランチ（破線）から著しくずれ始める。これが量子時間反転にみられる著しい特徴である。

さて我々が以下で考慮するのは量子系が古典系のエルゴード性をほぼ完全に模写しうるようなタイムスケールでおこる現象である。このタイムスケールでもなお図1に示すように量子系は古典系と著しく異った挙動を示しうるのである。

§ 1. 量子化された軌道不安定性

しきい値 ζ_{th} の存在は、2本の「近接軌道」が指数関数的に分離するにはある「基本的な」スケール ζ_{th} より離れておらねばならぬことを意味する。予想されるように、このスケールはプランク定数 $\hbar$ に比例する。問題はその比例係数である。今、系が束縛された領域で発展すると仮定してみよう。摂動によってシフトするのと直交した方向に測られた領域のサイズを L_{max} とすると、摂動のかかった方向は$\hbar/L_{max}$ を単位として量子化されている筈だから、ζ がユニット $\hbar/L_{max}$ を1つ以上ふくむことが古典化の条件、つまり

$$\zeta_{th} \sim \hbar/L_{max} \tag{1}$$

と考えられるかもしれない。ところが KR 系では θ 方向は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に bound されているが p 方向には bound されていない。ゆえに摂動が θ シフトならば $L_{max}=\infty$ で $\zeta_{th}=0$ であるようにみえる。しかし実験の結果は有限の ζ_{th} を与えてしまう。このことは系のダイナミクスが ζ_{th} を決定していることを示唆する。とするならば ζ_{th} は一般にいかような機構で決定されるのかが問題になる。詳しい実験的理論的研究によると ζ_{th} は「記憶距離」と不確定性関係 (1) によって決定されるのである：
ζ だけ離れた2粒子を考えよう。この2粒子が相対位置に関する記憶を喪失する迄の間につくるへだたり $P(\zeta)$ を、記憶距離と呼ぶ。KR ならば

$$P(\zeta) \sim (\frac{log\zeta}{\lambda}\, D_{cL})^{1/2} \tag{2}$$

但し D_{cL} は古典拡散定数。(1) の L_{max} を $P(\zeta)$ でおきかえた関係

$$\zeta = \hbar/P(\zeta) \tag{3}$$

によって ζ_{th} が定まるのである。理論的、実験的考察の結果をまとめると次の結論がえられる。

◆ $\zeta \gg \zeta_{th}$ ならば古典的流儀で記憶喪失がおこる。そのタイムスケールは、 $log\ \zeta/\lambda$

◆ $\zeta \ll \zeta_{th}$ でも記憶喪失はおこるが、そのタイムスケールは古典にくらべてはるかに長く $\hbar^2/\zeta^2 D_{cl}$ で与えられる。

§2. 量子系における過剰不安定性

§1 でのべた最小単位 ζ_{th} の存在は、一見量子古典対応がエルゴード性のいみで成立つようなタイムスケールでさえ、量子性が古典的不安定性を抑制する事をいみする。ところが $\hat{P}$ の摂動範囲が全位相空間におよばない局所摂動の場合には、量子的非可逆性が古典的なそれをりょうがするという奇妙な事態が発生する。摂動がおよぶ領域の面積を I_Ω としよう。図 2 に I_Ω の関数として非可逆性 m_{irr}（Ω 内にある確率 P_0 で規格化してある。）を表した数値実験の結果を示した。I_Ω が小さい場合を除いて（I_Ω が小さい領域でおこる現象は §1 で論じた量子抑制と本質的に同じゆえここでは議論しない。）明らかに量子系は古典系（破線で示した）を最大約 2 倍りょうがする。

何故にこのように奇妙な現象がおこるのだろうか？ 紙数も尽きたので詳細は略すがあらすじは次の通りである。摂動をうけた部分は、うけない時間反転によって元に戻るべき部分に対して「穴」に見える。「穴」は時間反転過程で指数関数的に圧縮される。ところが不確定性原理のために圧縮された方向と垂直な方向に穴がとび出してしまう。穴のとびだしは摂動をうけぬ部分を時間反転軌道の外側におしだし、この部分が非可逆性に寄与する。この部分は摂動された部分と同じ程度の非可逆性に寄与し、これが「2 倍」のファクターの起源と考えられる。

§3. むすび

摂動強度や摂動の空間スケールが量子的スケール（$\sim \hbar$）ならば確かに量子性は古典的なカオス的不安定性の顕在化を妨げる。これは従来言われてきた「量子性はカオスを抑制する」という性質の微視的な根拠を与える。しかし注目すべきは摂動が局所的（といってもその面積は $\hbar$ より十分広いといういみで古典的）な場合、逆に量子不確定性が系の不安定性と協同して非可逆性を古典系のそれより増大させるかのように作用する場合が存在する事である。その意義に対しては今後の検討が必要である。

〈参考文献〉

K. Ikeda, 'Time irreversibility of classically chaotic quantum dynamics'（プレプリント）

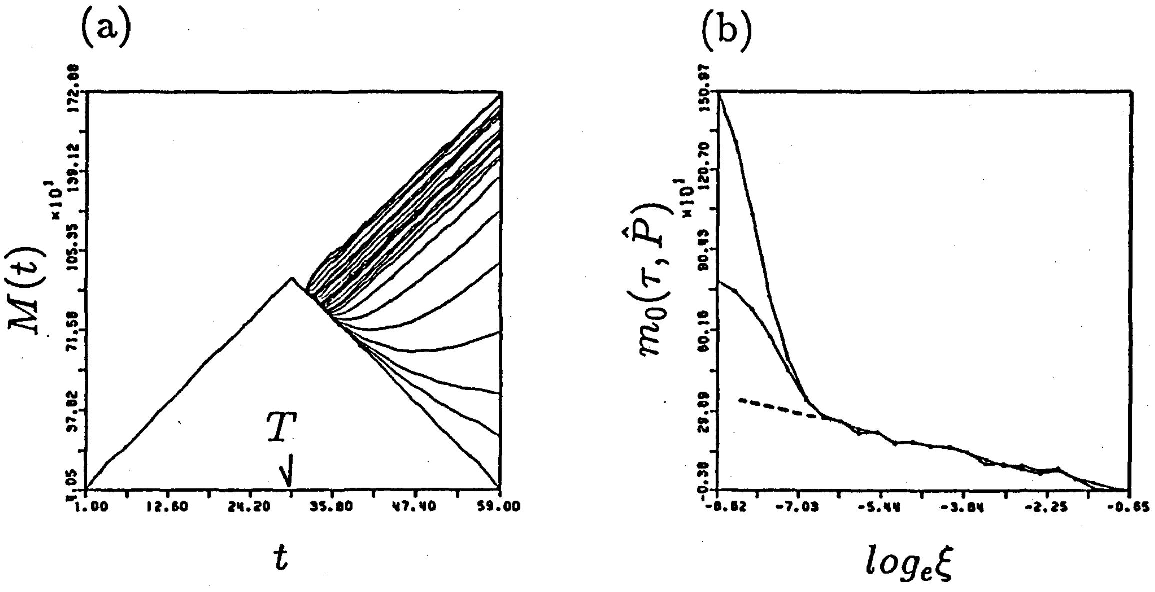
(a)
(b)
$M(t)$
$\times 10^3$
T
t
$m_0(\tau, \hat{P})$
$log_e \xi$

図 1

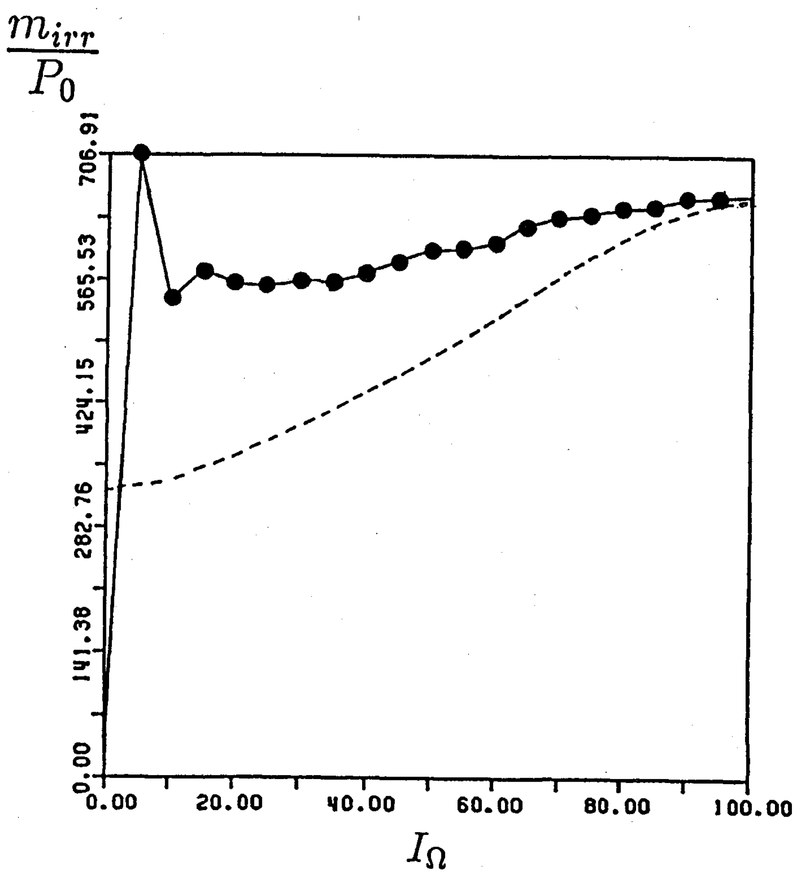
$\frac{m_{irr}}{P_0}$
706.91
565.53
424.15
282.76
141.38
0.00
0.00
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
I_Ω

図 2